Úvod do lineární algebry

1. Aritmetické vektory

Definice 1.1. Mějme $n \in \mathbb{N}$ a utvořme kartézský součin $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Každou uspořádanou $n-$ tici

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

budeme nazývat $n-$ rozměrným aritmetickým vektorem. Prvky $x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ nazýváme souřadnice aritmetického vektoru, číslo n je rozměr nebo dimenze vektoru.

• někdy budeme vektor zapisovat řádkově ve tvaru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.
• nulový n-rozměrný aritmetický vektor je

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix},$$

• rovnost vektorů je definována jako rovnost souřadnic, tj.

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

• součet vektorů je definován jako součet příslušných souřadnic, tj.

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow u_i = x_i + y_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

• součin reálného čísla (skaláru) a vektoru je také definován po souřadnicích, tj.

$$\vec{w} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow w_i = \lambda x_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

• na střední škole jste se seznámili se skalárním součinem vektorů, zobecněním této definice pro libovolné aritmetické vektory je předpis

$$\vec{a}^T \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

je to tedy součet součinů souřadnic a výsledkem je číslo- skalár.

• kombinací sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem získáme tzv. lineární kombinaci vektorů, přesněji:

Definice 1.2. Řekneme, že vektor $\vec{x}$ je lineární kombinací (krátce LK) vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, jestliže existují takové skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, že platí

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m.$$

Věta 1.1. *Nechť $\vec{w}$ je LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$. Je-li dále každý vektor $\vec{x}_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ LK vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$, je také vektor $\vec{w}$ LK vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$.*

Definice 1.3.

(1) Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ jsou lineárně závislé (krátce LZ) právě tehdy, pokud platí: $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{o} \quad \wedge \quad (\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_m \neq 0)).$$

(2) Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ jsou lineárně nezávislé (krátce LN) právě tehdy, pokud platí: $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_m = 0)).$$

Věta 1.2. *Nechť $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou $n-$rozměrné aritmetické vektory.*

(1) *Je-li $m = 1$, je vektor $\vec{a}_1$ lineárně závislý právě tehdy, je-li nulový.*

(2) *Je-li $m > 1$, pak vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_m$ jsou LZ právě tehdy, existuje-li vektor a_k, kde $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, který je LK zbývajících vektorů $\vec{a}_i, i \in \{1, 2, \ldots n\} \setminus \{k\}$.*

2. Soustavy lineárních rovnic poprvé

• Co je to lineární rovnice o n neznámých? Je to rovnice ve tvaru

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

kde $a_1, \ldots a_n$ a b jsou čísla a $x_1, \ldots x_n$ jsou neznámé. Řešením této rovnice budeme nazývat takovou $n-$ tici čísel, vektor

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

která po dosazení za neznámé $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ vytvoří z lineární rovnice pravdivý výrok.

- Co je to soustava m lineárních rovnic o n neznámých?

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Podobně jako pro jednu lineární rovnici, budeme řešením soustavy rovnice nazývat takovou $n-$ tici čísel, vektor $\vec{\xi}$, která po dosazení za neznámé $x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$ vytvoří z každé lineární rovnice v soustavě pravdivý výrok.

- **Ekvivalentní soustavy rovnic** o n neznámých jsou takové soustavy, které mají stejné množiny řešení.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic:

(1) Výměna pořadí dvou rovnic.
(2) Vynásobení rovnice nenulovým číslem.
(3) Přičtení jedné rovnice k jiné.

Příklad 2.1. Mějme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Soustavu lze řešit tak, že od zadané soustavy přejdeme pomocí ekvivalentních úprav k ekvivalentní soustavě, jejíž řešení již budeme umět nalézt...

Zadané soustavě lze přiřadit tabulku , která bude obsahovat koeficienty u neznámých x_1, x_2, x_3. Totiž

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto tabulku budeme nazývat *maticí soustavy.* K tabulce lze ještě připsat sloupec pravých stran, získáme tak novou tabulku

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

kterou nazveme *rozšířenou maticí soustavy.*

Pokud budeme soustavu rovnic nyní řešit, lze na řádcích matic provádět stejné úpravy, jaké bychom prováděli s rovnicemi v zadání.

Elementární řádkové úpravy:

(1) Výměna dvou řádků.
(2) Vynásobení řádku nenulovým reálným číslem.

(3) Přičtení nějakého násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Takovými úpravami lze předchozí matici převést na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{array}\right),$$

ze kterého již snadno určíme hodnoty neznámých $x_3 = 4, x_2 = -2, x_1 = 3$.

• Základní horní trojúhelníkový tvar soustavy nebo matice soustavy:

(1) první nenulový koeficient každé rovnice - řádku matice je roven jedné,
(2) začíná-li $k-$ tá rovnice nebo $k-$ tý řádek matice jistým počtem nulových koeficientů, má $k+1-$ ní rovnice - řádek na začátku alespoň o jeden nulový koeficient více,
(3) jsou-li všechny koeficienty v rovnici - na řádku nulové, lze ji-ho ze soustavy vyloučit.

• Jaká řešení lze očekávat? - žádné řešení, jedno řešení, nekonečně mnoho řešení.

3. Matice

• Matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) je tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

• krátce budme psát $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$

4. Maticová algebra

• Součet matic
Mějme matice $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m \times n}$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})_{m \times n}$.
Pak pro součet matic $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ platí $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ pro $i = 1, \dots, m$ a $k = 1, \dots, n$.

Příklad 4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Násobek matice reálným číslem
  Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m\times n}$ a číslo $\lambda \in \mathbf{R}$
  Pak pro násobek matice a čísla $\mathbf{D} = \lambda\mathbf{A}$ platí $d_{ik} = \lambda.a_{ik}$ pro $i = 1, \dots, m$ a $k = 1, \dots, n$.

Příklad 4.2. $4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

- Opačná matice
  $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$

Příklad 4.3. $-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Rozdíl matic
  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
- Součin dvou matic

Příklad 4.4. Mějme nejdříve soustavu jedné lineární rovnice o jedné neznámé. To lze zapsat ve tvaru

$$ax = b,$$

kde a, b i x lze považovat za matice typu $(1, 1)$.

Uvažujme nyní sostavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Bylo by žádoucí zapsat tuto soustavu v podobné formě součinu matic, jako tomu bylo u soustavy s jednou neznámou. Tedy ve tvaru

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Abychom toto mohli učinit je třeba vhodně definovat složky v součinu matic $\mathbf{AX}$. Je zřejmé , že násobíme „řádek první matice sloupcem druhé matice".

Definice 4.1. Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ a matici $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n\times p}$. Pak součin matic $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ik})_{m\times p}$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Pravidlo k pamatování „řádka krát sloupec": c_{ij} je skalární součin i–tého řádku matice $\mathbf{A}$ a j–tého sloupce matice $\mathbf{B}$.

Příklad 4.5.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -19 \\ 13 & 19 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -8 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ nejde násobit.

Z příkladů b) a c) plyne neplatnost komutativního zákona násobení matic, tj.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Věta 4.1. *Každý z následujících vztahů je platný pro libovolné skaláry α a β a pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$, pro které jsou definovány požadované operace:*

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
(2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
(3) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$,
(4) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC})$,
(5) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC})$,
(6) $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta A)$,
(7) $\alpha(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$,
(8) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$,
(9) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

- mocnina $\mathbf{A}^k = \overbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}^{k \text{ krát}}$

Definice 4.2. Trasponovaná matice k matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) je matice $\mathbf{B}$ typu (n, m) pro kterou platí

$$b_{ji} = a_{ij},$$

pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$. Transponovanou matici budeme označovat $\mathbf{A}^T$.

Definice 4.3. Matici $\mathbf{A}$ typu (n, n) budeme nazývat symetrickou, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Věta 4.2. *(Vlastnosti transponovaných matic)*

(1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
(2) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$,
(3) *jsou-li* $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ *stejného typu* (m, n), *je* $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
(4) *je-li* $\mathbf{A}$ *typu* (m, n) *a* $\mathbf{B}$ *typu* (n, p), *pak* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.